

Über eine Klasse HOPF'scher Integralgleichungen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
JOHANN-WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
zu Frankfurt am Main

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt.
Ein Exemplar der ungekürzten Arbeit liegt in der
Senckenbergischen Bibliothek der Universität vor.

vorgelegt von
Detlef L i n d
aus Dörnigheim

Frankfurt

1971



Dekan: Prof. Dr. H. Oelschläger
1. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Moufang
2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Stummel
Tag der mündl. Prüfung: 10. Februar 1971

Die Integralgleichung

$$(1) \quad \varphi(x) - \int_0^{\infty} \chi(x-y)\varphi(y)dy = 0, \quad x \geq 0$$

wurde bisher in einer Reihe von Arbeiten ([1], [2], [3], [4], [5]) unter zum Teil sehr allgemeinen Voraussetzungen über χ untersucht. Zu den Integralgleichungen dieses Typs gehört die Integralgleichung von MILNE :

$$(2) \quad \varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{Ei}(|x-y|)\varphi(y)dy = 0, \quad x \geq 0$$

mit

$$\text{Ei}(x) := \int_1^{\infty} \exp(-sx) d \ln s, \quad x > 0$$

Über die Lösungsdarstellung von (2) erschien im Jahre 1947 eine kurze Arbeit von C. MARK ([6]).

In der Arbeit von M.G. KREIN ([5]) wird vorausgesetzt, daß χ zu $L_1(-\infty, +\infty)$ gehört und daß die FOURIERtransformierte $\hat{\chi}$ nirgends auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ den Wert 1 annimmt. Unter dieser Voraussetzung existiert

$$(3) \quad n_{\chi} := -\frac{1}{2\pi} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \arg(1-\hat{\chi}(y)) - \lim_{y \rightarrow -\infty} \arg(1-\hat{\chi}(y)) \right)$$

Dabei ist $\arg(1-\hat{\chi}(\cdot))$ als stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ aufzufassen.*

n_{χ} wird der Index von (1) genannt. M.G. KREIN zeigte in [5], daß die Integralgleichung (1) genau $\max\{0, n_{\chi}\}$ linear unabhängige Lösungen in

$$E := \left\{ \varphi \mid \varphi \text{ glm. stetig auf } [0, \infty), \left(\int_0^{\infty} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \forall p \geq 1 \right\}$$

besitzt.

Wegen der Allgemeinheit der in [1], [2], [3], [4], [5] gemachten Voraussetzungen konnte in diesen Arbeiten bisher nur die allgemeine Aussage gewonnen werden, daß die Funktion $1-\hat{\chi}$ unter der Voraussetzung

$$(4) \quad \exp(a(\cdot))\chi \in L_1(-\infty, +\infty) \quad \forall a, |a| < h; h > 0, h \text{ fest}$$

im Streifen $|\text{Im } z| < h$ holomorph ist.

*) Da ich streng zwischen Funktionssymbol und Funktionswert unterscheide, schreibe ich einige Funktionssymbole unter Verwendung einer Leerstelle.

Da es das Ziel meiner Arbeit ist, eine Klasse von Kernen zu behandeln, auf die das in [6] benutzte Verfahren anwendbar ist, gehe ich zunächst von einer in [2] eingeführten Klasse von Kernen χ aus:

$$(5) \quad \chi(x) := \int_h^\infty \exp(-s|x|) d\sigma(s), \quad x \neq 0; \quad h > 0, h \text{ fest}$$

mit

$$(5a) \quad \sigma(s) \text{ monoton wachsend auf } (h, \infty)$$

$$(5b) \quad \int_h^\infty \frac{d\sigma(s)}{s} = 1$$

$$(5c) \quad \lim_{t \rightarrow h-0} \int_h^\infty \frac{d\sigma(s)}{s-t} = \infty$$

Unter den Voraussetzungen (5a) und (5b) existiert $\chi(x)$ für alle $x \neq 0$ und definiert eine Funktion χ , die (4) genügt.

Ich zeige folgendes Lemma:

Lemma 1

Vor.: χ genüge (5), (5a), (5b), (5c)

Beh.: 1) Die Funktion $\hat{\chi}$ läßt sich in die längs $A^+ := \{z \mid \operatorname{Im} z \geq h, \operatorname{Re} z = 0\}$ und $A^- := \{z \mid \operatorname{Im} z \leq -h, \operatorname{Re} z = 0\}$ aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}$ fortsetzen.

2) Die Funktion $1-t\hat{\chi}$ hat in $A := \{z \mid z \in \mathbb{C}, z \notin A^+, z \notin A^-\}$ für $t < 0$ keine Nullstellen.

3) Für $0 < t < 1/2$ besitzt $1-t\hat{\chi}$ in A genau zwei verschiedene rein imaginäre Nullstellen $z_t, -z_t$.

Für $t = 1/2$ besitzt $1-t\hat{\chi}$ in A nur die Doppelnullstelle $z_{1/2} = 0$.

Für $t > 1/2$ besitzt $1-t\hat{\chi}$ in A genau zwei verschiedene reelle Nullstellen $z_t, -z_t$.

Aus diesem Lemma folgt durch Anwendung der KREINSchen Theorie auf die Integralgleichung

$$(6) \quad \varphi(x) - t \int_0^\infty \chi(x-y) \varphi(y) dy = 0, \quad x \geq 0$$

der Satz:

Satz 1

Vor.: χ genüge (5), (5a), (5b), (5c)

Beh.: 1) Die Integralgleichung (6) ist in keinem der Räume $\exp(a(\cdot))E, a < 0$, nichttrivial lösbar. *)

*) Unter $\exp(a(\cdot))E$ ist die Menge $\{\varphi \mid \varphi = \exp(a(\cdot))\psi, \psi \in E\}$ zu verstehen.

Fortsetzung von Satz 1:

- 2) Die Integralgleichung (6) ist unter der Voraussetzung $0 < a < h$,
 $t > \frac{1}{\hat{\chi}(ia)}$, in $\exp(a(\cdot))E$ nichttrivial lösbar und alle
 Lösungen unterscheiden sich nur durch konstante Faktoren.

Setzt man $t > 0$ voraus, so läßt sich a so wählen, daß $\frac{1}{\hat{\chi}(ia)} < t$ gilt.
 Durch Anwendung der Faktorisierungstechnik (siehe dazu [5]) auf die
 Funktion $\tau_t = \frac{(\cdot)^2 + h^2}{(\cdot)^2 - z_t^2} (1 - t\hat{\chi})$ gewinne ich die Darstellung einer
 Lösung von (6) in der Form

$$(7) \quad \varphi(x) = \text{const} \int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} \frac{ih-z}{z^2 - z_t^2} \frac{\hat{\chi}(z)}{\tau_{t+}(-z)} \exp(izx) dz \text{ für fast alle } x \geq 0$$

Die Funktion τ_{t+} ergibt sich aus der Faktorisierung

$$\tau_t(z) = \tau_{t+}(z) \tau_{t-}(z) \quad \forall z, \quad |\text{Im } z| < h$$

und ist durch folgende Forderungen eindeutig bestimmt (siehe Lemma 2
 der ungekürzten Arbeit):

1. τ_{t+} ist in der Halbebene $\text{Im } z > -h$ holomorph, τ_{t-} ist in der Halbebene
 $\text{Im } z < h$ holomorph.
2. $\tau_{t+}(z)$ geht für $\text{Im } z \rightarrow \infty$ gegen 1, $\tau_{t-}(z)$ geht für $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ gegen 1.
3. $|\tau_{t+}(z)|$ ist in jeder Halbebene $\text{Im } z \geq h_0$, $h_0 > -h$, durch positive
 Konstanten nach oben und unten beschränkt.
 $|\tau_{t-}(z)|$ ist in jeder Halbebene $\text{Im } z \leq h_0$, $h_0 < h$, durch positive
 Konstanten nach oben und unten beschränkt.

Durch eine Verschiebung des Integrationsweges unter Anwendung des
 Residuensatzes (dieses Verfahren wurde bereits von E. HOPF in [2]
 angewendet) folgt daraus

Satz 2

Vor.: χ genüge (5), (5a), (5b), (5c). Sei $0 < a < h$, $t > \frac{1}{\hat{\chi}(ia)}$.

Beh.: Alle Lösungen φ von (6) in $\exp(a(\cdot))E$ lassen sich als konstante
 Vielfache einer speziellen Lösung φ^* von (6) schreiben. Es gilt

$$\varphi^*(x) = \gamma_t(x) - \frac{tc_t}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{z-ih}{z^2 - z_t^2} \frac{\exp(izx)}{\tau_{t+}(-z)} \hat{\chi}(z) dz \text{ für fast alle } x \geq 0$$

mit

$$\gamma_t(x) = \sinh(|z_t|x + p_t) \quad \text{für } 0 < t < 1/2$$

$$\gamma_{1/2}(x) = x + p_{1/2}$$

$$\gamma_t(x) = \sin(|z_t|x + p_t) \quad \text{für } t > 1/2$$

Die Konstanten c_t und p_t sind auf Seite 21 der ungekürzten
 Arbeit angegeben.

Ein Teil des Resultates von Satz 2 ist bereits in [5] (S.258) erwähnt. Unter der Annahme, daß χ eine gerade reellwertige Funktion ist, die (4) genügt, und $1-\hat{\chi}$ im Streifen $|\operatorname{Im} z| < h$ genau zwei Nullstellen besitzt, erhält M.G. KREIN die gleiche Darstellung für γ_t . In meiner Arbeit folgen diese Voraussetzungen aus der Konstruktion von χ .

Setzt man τ_{t+} durch die Definition $\tau_{t+}(z) := \frac{\tau_t(z)}{\tau_{t-}(z)} \quad \forall z \in A, \operatorname{Im} z \leq -h$, analytisch nach A fort, so ist der Integrand auf der rechten Seite der Darstellung für φ^* in Satz 2 holomorph in A .

Ich verlange jetzt, daß die bei der Definition von χ auf der rechten Seite von (5) auftretende Funktion σ folgende Bedingungen erfüllt:

$$(8a) \quad \varphi(s) := \sigma'(s) \quad \text{ex. für alle } s \geq h$$

$$(8b) \quad \varphi(s) > 0 \quad \text{für alle } s \geq h$$

$$(8c) \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \text{const} \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right|^\varepsilon \quad \forall u, v \geq h$$

$$(8d) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = 0$$

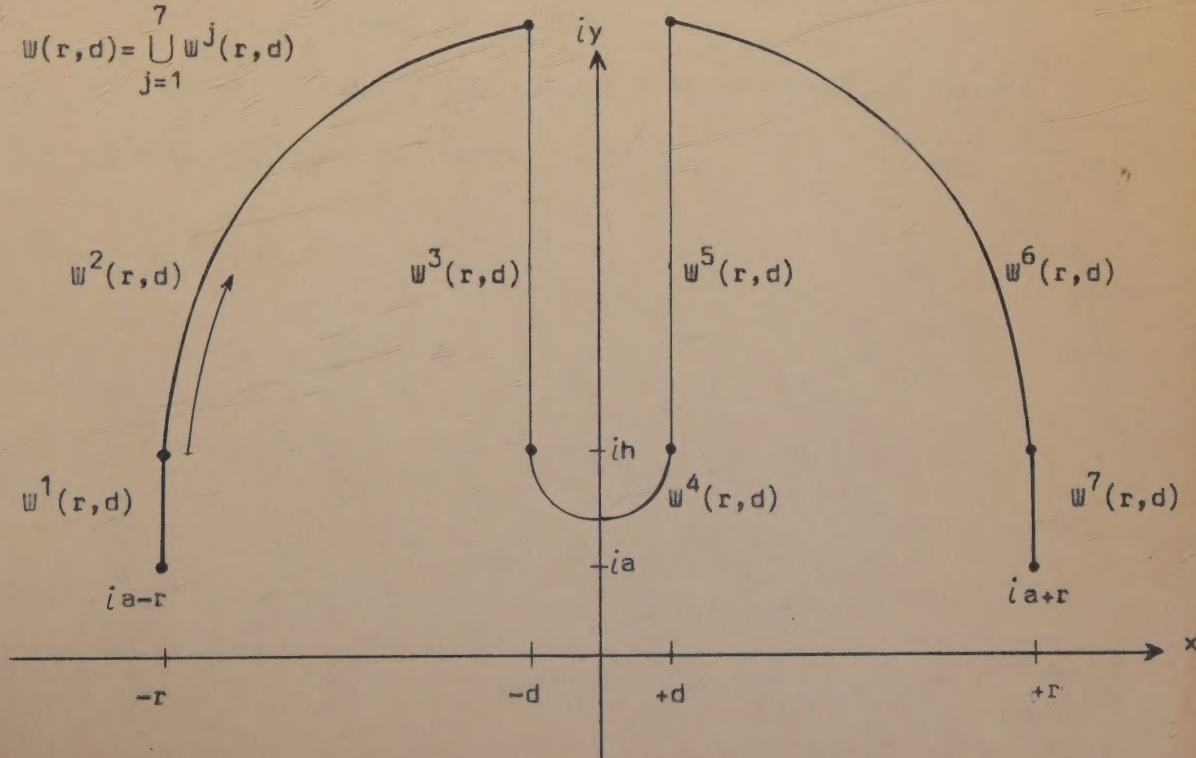
Aus diesen Voraussetzungen folgt

$$(9) \quad \varphi^*(x) = \gamma_t(x) - \frac{tc_t}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{ia-r}^{ia+r} \frac{z-ih}{z^2-z_t^2} \frac{\exp(izx)}{\tau_{t+}(-z)} \hat{\chi}(z) dz$$

für alle $x \geq 0$

Die Integration auf der rechten Seite von (9) läßt sich wegen der Holomorphie des Integranden in A durch eine Integration längs des Weges $\mathbb{W}(r,d)$ ersetzen:

$$\mathbb{W}(r,d) = \bigcup_{j=1}^7 \mathbb{W}^j(r,d)$$



Für $r \rightarrow \infty$ gehen die Integrale längs $\mathbb{W}^1(r,d)$, $\mathbb{W}^2(r,d)$, $\mathbb{W}^6(r,d)$ und $\mathbb{W}^7(r,d)$ gegen 0. Aus der nach dem Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ verbleibenden Darstellung von φ^* folgt durch Grenzübergang $d \rightarrow +0$ der folgende Satz:

Satz 3

Vor.: x genüge (5), (5b), (8a) bis (8d)

Beh.: Die Integralgleichung (6) ist für jedes positive t in V ,

$V := \bigcup_{a \in (0,h)} \exp(a(\cdot))E$, nichttrivial lösbar. Alle Lösungen, die zum gleichen t gehören, lassen sich als Vielfache einer speziellen Lösung φ^* darstellen. Es gilt

$$\varphi^*(x) = \gamma_t(x) + q_t \int_h^\infty \eta_t(s) \exp(-sx) ds, \quad \forall x \geq 0$$

mit einem geeigneten $\eta_t \in L_1(h, \infty)$ und einer Konstanten q_t .

Die Funktion γ_t ist die gleiche wie in Satz 2, die Darstellungen für η_t und q_t sind auf Seite 35 der ungekürzten Arbeit nachzulesen.

Literaturverzeichnis:

- [1] N. WIENER-E. HOPF, Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. der Wissensch., Phys.-Math. Kl., 30/32 (1931), S.696-706
- [2] E. HOPF: Mathematical Problems of radiative Equilibrium, Cambridge Tracts, 1934
- [3] I.M. RAPOPORT, Dokl. Akad. Nauk SSSR 59 (1948), S.1403-1406
- [4] I.M. RAPOPORT, Sb. Trudov Inst. Math. Akad. Nauk Ukrain. RSR 12 (1949), S.102-118
- [5] M.G. KREIN, Am. Math. Soc. Transl. (2) 22 (1962), S.163-288
- [6] C. MARK, Ph. Rev. 72 (1947), S.558

Lebenslauf

Ich, Detlef Lind, wurde am 14. März 1942 in Dörnigheim am Main als Sohn des kaufmännischen Angestellten Emil Lind und seiner Ehefrau Else, geb. Acker, geboren. Nach vier Volksschuljahren an der Dörnigheimer Volksschule besuchte ich ab 1953 die Hohe Landesschule in Hanau, die ich 1962 mit dem Reifezeugnis verließ. Ich schrieb mich an der Johann-Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main für das Mathematikstudium ein. Im Mai 1964 legte ich die Vordiplomprüfung für Mathematiker ab. 1965 erhielt ich eine Stelle als wissenschaftliche Hilfskraft im Mathematischen Seminar am Lehrstuhl von Frau Prof. Dr. Ruth Moufang. 1968 legte ich die Diplomprüfung für Mathematiker ab. Das Thema meiner Diplomarbeit lautete "Die reelle Integraldarstellung der Lösung der Integralgleichung von MILNE".

Meine akademischen Lehrer waren Frau Prof. Dr. Ruth Moufang und die Herren Dr. es R. Baer, F. W. Bauer, F. Baur, W. Benz, M. Czerny, H. Dänzer, H. Dinges, R. Ebert, W. Franz, W. Gleissberg, H. Heuser, G. Köthe, R. Kultze, W. Lohmann, W. Martienssen, B. Mrowka, H. A. Muser, H. Salzmann, K. Schiller, F. Stummel.

Ihnen gilt mein Dank, besonders Frau Prof. Dr. Ruth Moufang für die Anregung und Förderung der vorliegenden Arbeit.

Mein Dank gilt auch Prof. Dr. K. Jörgens aus München für seine freundliche Unterstützung.

